Algorithmique

TD 4 : Cheminer & Construire

Exercice 1 (Plus courts Chemins dans un Graphe) Étant donné un graphe (fini) $G = (V, E)$ & deux sommets x & y de G, on cherche à déterminer le (ou les, ou un) plus court(s) chemin(s) pour aller de x à y. C'est un problème très naturel qui a de nombreuses applications. On donnera un algorithme pour les cas suivant :

- Le graphe n'est pas valué. Dans ce cas, la longueur d'un chemin est le nombre d'arêtes le composant.
- Le graphe est valué (chaque arête a une "longueur") & toutes les longueurs d'arêtes sont positives. Dans ce cas, la longueur d'un chemin est la somme des longueurs des arêtes le composant.
- Le graphe est valué & les longueurs d'arêtes sont quelconques (positives ou négatives). Dans ce cas, il faudra en plus :
  - déterminer à quelles conditions un tel chemin existe.
  - montrer que ce problème est équivalent à la détermination d'un plus long chemin dans un (autre) graphe (que l'on déterminera).

Exercice 2 (Construction d'une Maison) Comme toute tâche complexe, la construction d'une maison peut se décomposer en plusieurs tâches "élémentaires". On connaît la durée de chaque tâche élémentaire, ainsi que les tâches (élémentaires) qui doivent être finies avant que l'on puisse la commencer (e.g. *il faut faire les murs avant le toit*). L'ensemble de ces contraintes peut être représenté par la tableau suivant :

Code	Nom de la tâche	Durée	Tâches antérieures
A	Obtention Permis	6	
B	Adduction Eau Electricite	3	
C	Fondations, Murs Exterieurs	5	A,B
D	Charpente	2	C
E	Toiture	2	D
F	Plafond	2	D
G	Cloisons	3	F
H	Plomberie	3	G,F
I	Electricite	2	G,F
J	Platre	3	E,F,G,H,I

Le problème (appelé *ordonnancement*) est de s'organiser de telle sorte que l'ensemble de la construction prenne le moins de temps possible. Une tâche sera dite *critique* si un retard sur elle entraine un retard sur l'ensemble du chantier.

- Montrez que les tâches critiques sont toutes sur un plus long chemin (en fait, il peut y en avoir plusieurs) dans un graphe (dit *graphe potentiels-tâches*) que l'on déterminera. Ce chemin est appelé *chemin critique*.

Étant donnée une tâche X, on définit de manière naturelle la *date au plus tôt* de X, ainsi que la *date au plus tard* qui est le dernier moment auquel on peut commencer X sans retarder tout le chantier (pour une tâche critique, les deux dates sont égales).

- Montrez que les dates au plus tôt & au plus tard peuvent se déterminer à l'aide du graphe de la question précédente.
- Montrez que l'on peut également représenter/traiter les contraintes :
  - La tâche X ne peut commencer avant la date d.
  - La tâche X ne peut commencer après la date d.
  - La tâche X doit commencer *immédiatement* après la (fin de la) tâche Y.
  - Entre la fin de Y & le début de X, il doit s'écouler un temps t.

À partir de là, il est très facile de construire un *GANTT*. Cette méthode est appelée *PERT*.